

# 向量角选择和指标删除的高维多目标进化算法

顾清华<sup>1,2,3+</sup>, 骆家乐<sup>1,2</sup>, 李学现<sup>1,2</sup>

1. 西安建筑科技大学 管理学院, 西安 710055

2. 西安建筑科技大学 西安市智慧工业感知、计算与决策重点实验室, 西安 710055

3. 西安建筑科技大学 资源工程学院, 西安 710055

+ 通信作者 E-mail: qinghuagu@126.com

**摘要:** 针对进化算法求解高维多目标优化问题平衡收敛性和多样性所面临的挑战, 提出了向量角选择和指标删除的高维多目标进化算法(MOEA/AS-ID)。该算法在环境选择过程中设计了一种包含两种策略的协作机制逐一删除收敛性和多样性差的解以保留精英个体参与下一代的进化。前者基于向量角的选择策略用于选择一对在目标空间具有相似搜索方向的解, 后者基于指标的删除策略采用同时兼顾个体收敛性和分布性的  $I_{SDE}^+$  指标比较被选择的这一对解, 然后删除具有较小指标值的解, 进而促使种群朝各个方向收敛到帕累托最优前沿, 最终平衡解集的收敛性和多样性。在包含各种特征的3组标准测试系列问题DTLZ、SDTLZ、MaF上, MOEA/AS-ID与近年提出的6个涵盖了当前各种类型的高维多目标进化算法执行了广泛的对比仿真实验和数值结果分析。仿真结果和数值分析表明所提算法MOEA/AS-ID求解各种特征的高维多目标优化问题平衡收敛性和多样性的能力具有较强的竞争力。

**关键词:** 进化算法; 高维多目标优化; 向量角选择; 指标删除; 收敛性; 多样性

**文献标志码:** A **中图分类号:** TP301

## Many-Objective Evolutionary Algorithm with Vector Angle Selection and Indicator Deletion

GU Qinghua<sup>1,2,3+</sup>, LUO Jiale<sup>1,2</sup>, LI Xuexian<sup>1,2</sup>

1. School of Management, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China

2. Xi'an Key Laboratory for Intelligent Industrial Perception, Calculation and Decision, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China

3. School of Resources Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China

**Abstract:** Given that the challenge for evolutionary algorithms when solving many-objective optimization problems lies in balancing the convergence and diversity, a many-objective evolutionary algorithm based on vector angle selection and indicator deletion (MOEA/AS-ID), is proposed. In this algorithm, a coordinated mechanism that includes two strategies is designed in the environmental selection process to delete the solutions with poor convergence and diversity one by one, retaining the elitist to participate in the evolution process for the next generation. To be specific, the former strategy based on vector angle selection is used to select a pair of solutions with a similar search direction in the objective space, and the latter indicator-based deletion strategy which uses the  $I_{SDE}^+$  indicator

**基金项目:** 国家自然科学基金(52074205); 陕西省自然科学基金杰青项目(2020JC-44)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52074205), and the Outstanding Youth Project of the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2020JC-44).

**收稿日期:** 2022-08-31 **修回日期:** 2022-11-30

(indicator shift-based density estimation) that takes into account the convergence and diversity of a single solution, is employed to compare the selected pair of solutions and delete the solution with a smaller indicator value, then encourage the population to converge to the Pareto optimal front toward all directions. Finally, the balance between convergence and diversity of the solution set is achieved. On DTLZ (Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler), SDTLZ (scaled DTLZ), and MaF (many-objective function) three benchmark test suites with various characteristics, MOEA/AS-ID and six recently proposed many-objective evolutionary algorithms covering all current types perform extensive comparative simulation experiments and numerical results analysis. Simulation results and numerical analysis show that MOEA/AS-ID has strong competitiveness in balancing the convergence and diversity when solving many-objective optimization problems with various characteristics.

**Key words:** evolutionary algorithm; many-objective optimization; vector angle selection; indicator deletion; convergence; diversity

实际工程应用领域<sup>[1-2]</sup>很多优化问题往往需要同时优化不止一个目标,其中,需要同时优化2至3个目标的优化问题称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs),需要同时优化3个以上目标的问题称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs)<sup>[3]</sup>。近年来,由于高维多目标优化问题广泛存在于实际工程应用中,如机器人结构参数优化<sup>[4]</sup>、飞机机翼设计优化<sup>[5]</sup>等。因此,对于高维多目标优化的研究成为了优化领域的热点话题。

由于数学分析的方法求解MOPs或MaOPs问题对目标函数都有一定的要求,如需要目标函数可导、连续等。因此,数学分析方法不仅计算复杂而且难以求解MOPs或MaOPs。但是,进化算法(evolutionary algorithms, EAs)不用解析目标函数且对目标函数的特征没有任何要求,而是通过模拟自然界生物进化的过程来优化该类问题。因此,许多经典的多目标进化算法,如NSGA-II(non-dominated sorting genetic algorithm)<sup>[6]</sup>、MOEA/D(multi-objective evolutionary algorithm decomposition-based)<sup>[7]</sup>,已经被提出并且被证明是求解MOPs高效的方法。然而,当它们求解MaOPs时,它们的求解性能会急剧地下降,这主要归咎于两方面:一方面,随着目标维数的增加,非支配解的数量成指数倍增加,严重削弱了对帕累托最优前沿的选择压力,造成算法难以收敛;另一方面,高维目标空间难以利用目标空间的信息维持种群的多样性<sup>[8]</sup>。为了提高进化算法求解MaOPs的性能,许多高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithms, MOEAs)被提出,大致可以分为以下四类:

(1)基于松弛帕累托支配关系的MOEAs。该类算法的核心思路是定义新的支配关系来松弛严格的

帕累托支配关系。如在广义帕累托最优配(generalized Pareto optimality, GPO)<sup>[9]</sup>、角度支配(angle dominance)<sup>[10-11]</sup>、CSDR(controlled strengthened dominance relation)支配<sup>[12]</sup>中,通过扩大个体的支配区域增加对非支配解的选择压力。受到分解思想的启发,一些学者提出了SDEA(scalarization-based dominance evolutionary algorithm)支配<sup>[13]</sup>、RPS(reference points strengthened dominance relation)支配<sup>[14]</sup>以及 $\theta$ 支配( $\theta$  dominance)<sup>[15]</sup>。但是,以上支配关系主要是依据收敛性度量来增加选择压力且需要多个参数来控制支配区域的范围,不可避免地会面临确定不同特征问题松弛程度的障碍。

(2)基于特殊的收敛性和多样性管理机制的MOEAs。双档案管理的Two\_Arch2(two archives)<sup>[16]</sup>通过帕累托支配来更新收敛性档案,解到收敛性档案的 $L_p$ 范数距离来更新多样性档案。但是,帕累托支配关系难以解决维数诅咒难题,导致双档案管理策略难以在高维目标空间平衡解集的收敛性和多样性。RSEA(radical space division based evolutionary algorithm)<sup>[17]</sup>将高维空间投影到二维径向空间,利用径向网格来维持解的多样性,但是不可避免地面临确定每一维目标轴上网格划分的障碍。在NAEA(Niching and angle selection based evolutionary algorithm)<sup>[18]</sup>中,设计了小生境技术来维持种群的多样性,使用基于向量角的小生境拥挤度度量个体在目标空间的分布,以此删除拥挤度较大的个体维持种群的多样性。两阶段搜索策略的TSEA(multistage evolutionary algorithm)<sup>[19]</sup>和TS-NSGAI(multistage NSGAI)<sup>[20]</sup>将种群的进化过程划分为两个阶段,第一个阶段偏向维护种群的收敛性,第二个阶段偏向维护种群的多样性。但是,两阶段管理策略需要设定较多的参

数来预判进化所处的状态以此来划分阶段。如果误判进化所处的状态会削弱算法的性能。近似估计帕累托最优前沿形状的 MOEAs<sup>[21-23]</sup>,其核心思想是利用形状估计的曲率信息设计收敛性和多样性度量指标来选择个体参与进化。但是,近似估计的方法难以估计不规则帕累托前沿的形状。此外,一些学者设计了自适应参考点的 MOEAs<sup>[24-25]</sup>求解不规则帕累托前沿问题。但是,每一代加入了许多参考点降低了算法的效率且算法处理规则的帕累托前沿问题的性能差。

(3)基于分解策略的 MOEAs。分解策略包含了两种分解思想:第一种思想是通过聚合函数,如切比雪夫聚合函数、加权切比雪夫聚合函数、惩罚边界交叉聚合函数等,将多目标优化问题转化为单目标子问题。MOEA/D<sup>[7]</sup>是该种思想最具代表性的算法。但是,它仅仅适合求解 MOPs。因此,许多 MOEA/D 的变体<sup>[26-28]</sup>被提出来求解 MaOPs。第二种分解思想是通过预定义一组参考向量将目标空间划分为一系列子空间,NSGA-III(non-dominated sorting genetic algorithm based reference points)<sup>[29]</sup>属于该种思想的代表。但是,固定的参考向量难以求解不规则帕累托前沿问题。因此,一些学者设计了自适应分解策略<sup>[30-31]</sup>求解不规则帕累托前沿问题。由于问题的真实帕累托前沿信息是未知的,权重向量的分布很难与真实的帕累托前沿保持一致。

(4)基于指标的 MOEAs。一些性能度量指标作为环境选择的标准,最普遍使用的指标包括 IGD(inverted generational distance)指标、HV(hypervolume)指标、R2 指标。这些指标可以很方便地嵌入 MOEAs 求解 MaOPs。然而,基于 IGD 指标<sup>[32-33]</sup>和 R2 指标的算法<sup>[34-35]</sup>严重依赖于参考集;基于 HV 指标的算法<sup>[36]</sup>,随着目标维数的增加,HV 指标的计算复杂度成指数倍递增。不同于以上三种指标,最近被提出的  $I_{SDE}^+$  指标<sup>[37]</sup>不仅不需要借助参考集,计算简单,而且可以同时评估单个解的收敛性和分布性。

综上所述,尽管上述四类算法一定程度上有助于提高 MOEAs 处理 MaOPs 的性能,但是它们都有各自的缺陷,求解 MaOPs 平衡收敛性和多样性的性能还有待进一步提升。因此,本文设计了一种向量角选择和指标删除的高维多目标进化算法(many-objective evolutionary algorithm based on vector angle selection and indicator deletion, MOEA/AS-ID)。该算法与上述四种算法的本质区别在于选择个体参与进

化的环境选择过程。所提算法主要设计了基于向量角的选择策略和基于  $I_{SDE}^+$  指标删除策略所组成的协作机制完成以上选择过程。主要创新如下:

(1)MOEA/AS-ID 算法设计了一种简单且直接的方法平衡解集的多样性和收敛性,其核心在于基于向量角的选择策略和基于指标的删除策略所形成的协作机制:首先,从候选解中选择具有最小向量角的一对解;然后,采用可以同时度量个体收敛性和分布性的  $I_{SDE}^+$  指标删除其中指标值较小的那个。

(2)充分利用向量角的物理意义:在目标空间,候选解之间的向量角可以反映两个解在搜索方向的相似性,所提算法更加注重候选解之间的局部信息,促使种群朝各个方向收敛到帕累托前沿。

## 1 相关知识

### 1.1 高维多目标优化问题

以最小问题为例,高维多目标优化问题可以用式(1)表示:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))^T \\ x &\in \Omega, F(x) \in \mathbf{R}^M \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\Omega$  是决策空间,  $\mathbf{R}^M$  是  $M$  维目标空间,  $M > 3$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega$  是决策空间的  $n$  维决策向量,  $F(x)$  是由决策空间  $\Omega$  映射到  $M$  维目标空间  $\mathbf{R}^M$  的目标值组成的目标向量,  $f_i(x)$  是优化问题第  $i$  个目标值。

### 1.2 基本定义

**定义 1**(帕累托支配关系) 对于任意两个解  $x$  和  $y$ , 解  $x$  帕累托支配解  $y$ , 被标记为  $x \prec y$ , 当且满足:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, M\}, f_i(x) &\leq f_i(y) \\ \exists i \in \{1, 2, \dots, M\}, f_i(x) &< f_i(y) \end{aligned} \quad (2)$$

任意的两个解  $x$  和  $y$ , 如果解  $x$  不满足帕累托支配解  $y$  的条件, 解  $y$  也不满足帕累托支配解  $x$  的条件, 那么称解  $x$  和  $y$  是互不支配的, 被标记为  $x \not\prec y, y \not\prec x$ 。

**定义 2**(非支配解) 对于解  $x \in \Omega$ , 如果不存在任何  $y \in \Omega$  支配解  $x$ , 被标记为  $\nexists y \in \Omega, x \in \Omega$ , 使得  $y \prec x$ , 那么解  $x$  被称为非支配解。

**定义 3**(帕累托最优集) 由非支配解构成的集合称为帕累托最优集, 被标记为  $PS = \{x \in \Omega \mid \nexists x' \in \Omega, x' \prec x\}$ 。

**定义 4**(帕累托最优前沿) 由帕累托最优集映射到目标空间组成的集合称为帕累托最优前沿,  $PF = \{F(x) \in \mathbf{R}^M \mid x \in PS\}$ 。

## 2 MOEA/AS-ID 算法

本章主要介绍所提算法 MOEA/AS-ID, 包括算法的整体求解框架、繁殖过程、向量角、 $I_{SDE}^+$  指标、环境选择过程以及算法的计算复杂度。

### 2.1 提出算法的整体求解框架

**算法 1** MOEA/AS-ID 的整体求解框架

输入: 种群的规模  $N$ , 最大迭代次数  $G_{max}$ ,  $t=0$ 。

输出: 最终的种群  $P_{t+1}$ 。

1.  $P_t = \text{Initialize}(N)$
2. While  $t < G_{max}$
3.  $Q_t = \text{Reproduction}(P_t)$
4.  $R_t = P_t \cup Q_t$
5.  $P_{t+1} = \text{EnvironmentalSelection}(R_t, N)$
6.  $t = t + 1$
7. End while

类似于大多数的多目标进化算法, 所提算法的整体求解框架主要包括种群初始化、子代繁殖过程、环境选择过程。算法 1 的伪代码展示了所提算法的整体求解框架。以下步骤是对算法 1 求解过程伪代码的具体解释:

输入参数: 种群的规模  $N$ , 迭代次数  $t=0$ , 最大迭代次数  $G_{max}$ 。

**步骤 1**(算法 1 第 1 行) 随机生成数量为  $N$  的初始化(initialize)父代种群  $P_t$ 。

以下步骤进入算法进化的循环过程(算法 1 第 2~7 行)。

**步骤 2**(算法 1 第 3 行) 对父代种群  $P_t$  通过广泛使用在多目标进化算法中的模拟二进制交叉(simulated binary crossover, SBX)和多项式变异(polynomial mutation, PM)算子繁殖(reproduction)产生子代  $Q_t$ 。

**步骤 3**(算法 1 第 4 行) 将父代种群  $P_t$  和子代种群  $Q_t$  合并, 形成种群规模为  $2N$  的联合种群:  $P_t \cup Q_t = R_t$ 。

**步骤 4**(算法 1 第 5 行) 采用设计的环境选择(environmental selection)策略从联合种群  $R_t$  选择  $N$  个个体构成下一代的父代种群  $P_{t+1}$ , 具体操作见 2.5 节算法 2。

**步骤 5**(算法 1 第 6~7 行)  $t = t + 1$ , 当迭代次数  $t$  达到预先设定的最大迭代次数  $G_{max}$ , 算法结束, 输出  $P_{t+1}$ 。否则, 重复执行步骤 2 到步骤 4。

输出结果: 最终的种群  $P_{t+1}$ 。

环境选择过程致力于从父代和子代种群的联合种群中选择兼具良好收敛性和多样性的个体不断进

化, 进而维护最终种群的收敛性和多样性。所提算法充分利用了向量角的物理意义和  $I_{SDE}^+$  指标可以同时评估个体收敛性和分布性的双重属性, 首次融合二者的优势, 在环境选择过程中设计了基于向量角的选择策略和基于  $I_{SDE}^+$  指标的删除策略来促使种群朝各个方向收敛到帕累托前沿, 即平衡种群的收敛性和多样性。以下是对所提算法涉及流程的详细分析。

### 2.2 繁殖过程

繁殖(reproduction)过程旨在通过进化算子对父代种群执行交叉、变异产生子代。MOEA/AS-ID 算法使用模拟二进制交叉(SBX)<sup>[38]</sup>和多项式变异(PM)<sup>[39]</sup>产生子代  $Q_t$ 。主要原因有以下几点:

(1) SBX 和 PM 进化算子被广泛使用在多目标进化算法中, 包括引言综述的算法均是使用 SBX 和 PM 进化算子产生子代。

(2) 实验模块的对比算法的原始文献也均是采用 SBX 和 PM 进化算子产生子代, 当和对比算法执行性能对比实验时, 可以保证一个公平的比较。

### 2.3 计算向量角

向量角指种群成员的目标向量之间的角度。任意一对个体  $x$  和  $y$  之间的目标向量角由式(3)计算:

$$\theta(x, y) = \arccos \frac{\mathbf{F}(x) * \mathbf{F}(y)}{\|\mathbf{F}(x)\| * \|\mathbf{F}(y)\|} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{F}(x) * \mathbf{F}(y)$  是个体  $x$  和  $y$  的目标向量的内积,  $\|\mathbf{F}(x)\|$  和  $\|\mathbf{F}(y)\|$  分别是个体  $x$  和  $y$  目标向量的模长,  $\arccos(\cdot)$  是两个解的目标向量之间的反余弦值。需要注意: 在计算向量角之前, 每一个目标值均需要归一化处理。很明显, 个体之间的向量角  $\theta(x, y) \in [0, \pi/2]$ 。

从式(3)向量角的理论计算可以发现: 个体之间的向量角反映了个体在搜索方向的相似性。具体来说, 两个个体之间的目标向量角越大, 表示该组解在搜索方向的差异性越大, 正如图 1 中的个体  $A$  和  $F$  向完全不同的方向搜索; 两个个体之间的目标向量角越小, 表示该组解在搜索方向的差异性小, 正如图 1 中的个体  $D$  和  $C$  具有相似的搜索方向。

### 2.4 计算 $I_{SDE}^+$ 指标

正如文献[37]所述,  $I_{SDE}^+$  (indicator shift-based density estimation) 指标计算简单且可用于同时评估单个解的收敛性和分布性。当度量种群  $P$  中个体  $x \in P$  的  $I_{SDE}^+$  指标时, 首先, 通过目标求和的收敛度比较方法, 将种群  $P$  中其他收敛性较好的个体  $y_j \in P$  移动到个体  $x$  周围。以种群  $P$  中第  $j$  个个体  $y_j$  为例, 个体  $y_j$

移动到个体  $\mathbf{x}$  周围新的位置计算公式如下：

$$f_i^s(\mathbf{y}_j) = \begin{cases} f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y}_j) < f_i(\mathbf{x}) \text{ 且 } \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{y}_j) < \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x}) \\ f_i(\mathbf{y}_j), \text{ 否则} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $M$  是目标的数量;  $f_i(\mathbf{x})$  和  $f_i(\mathbf{y}_j)$  分别是个体  $\mathbf{x}$  和个体  $\mathbf{y}_j$  第  $i$  个目标值;  $f_i^s(\mathbf{y}_j)$  是解  $\mathbf{y}_j$  的第  $i$  个目标值转化到新位置的目标值。因此, 个体  $\mathbf{y}_j$  新的目标向量值为  $\mathbf{F}^s(\mathbf{y}_j) = (f_1^s(\mathbf{y}_j), f_2^s(\mathbf{y}_j), \dots, f_M^s(\mathbf{y}_j))$ 。

经过上述位置移动,  $I_{\text{SDE}}^+$  指标的计算公式如下：

$$I_{\text{SDE}}^+(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in P, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}} \{ \text{dist}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^s(\mathbf{y}_1)), \text{dist}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^s(\mathbf{y}_2)), \dots, \text{dist}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^s(\mathbf{y}_n)) \} \quad (5)$$

其中,  $\text{dist}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^s(\mathbf{y}_i))$  是个体  $\mathbf{x}$  的目标向量和个体  $\mathbf{y}_i$  转换位置的目标向量在目标空间的欧式距离;  $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\} \in P, \mathbf{x} \in P$ , 满足  $\forall \mathbf{y}_j \in Y, \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{y}_j) < \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{x})$ ; 同样, 在计算  $I_{\text{SDE}}^+$  指标之前, 每一个目标值均需要归一化处理。

个体的  $I_{\text{SDE}}^+$  指标越大, 说明个体同时具有越好的收敛性和分布性。依据式(4)和式(5), 可以发现每个个体的  $I_{\text{SDE}}^+$  指标比较了其他个体在每个目标上与该个体之间的收敛性信息。然后, 通过转换位置的密度信息同时度量个体的收敛性和分布性。  $I_{\text{SDE}}^+$  指标考虑收敛性信息可以增强对帕累托前沿的选择压力。此外, 依据式(4)和式(5), 考虑收敛性较好的解的位置转换来评估分布性可以反映解在种群多样性方面的实际贡献<sup>[37]</sup>。

## 2.5 环境选择

### 算法2 环境选择

输入: 联合种群  $R_t = P_t \cup Q_t$ 。

输出:  $P_{t+1}$ 。

1. 对联合种群  $R_t$  的目标值进行归一化处理
2. 计算联合种群  $R_t$  中任意两个个体的向量角
3. 计算联合种群  $R_t$  中所有个体的  $I_{\text{SDE}}^+$  指标值
4. While  $|P_{t+1}| < N$
5. 在合并种群  $R_t$  中选择一对具有最小向量角个体  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$
6. If  $I_{\text{SDE}}^+(\mathbf{u}) > I_{\text{SDE}}^+(\mathbf{v})$
7.  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup \{\mathbf{u}\}$
8.  $R_t = R_t / \{\mathbf{u}\}$
9. Else
10.  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup \{\mathbf{v}\}$
11.  $R_t = R_t / \{\mathbf{v}\}$
12. End if

### 13. End while

在通过进化算子产生子代以后, 类似于大多数的多目标进化算法, MOEA/AS-ID 算法在环境选择过程中从联合种群  $R_t = P_t \cup Q_t$  选择  $N$  个精英个体到下一代参与进化。但是, MOEA/AS-ID 算法的环境选择策略不同于其他算法, 其核心在于: 基于向量角的选择策略和基于  $I_{\text{SDE}}^+$  指标删除策略所形成的协作机制。算法2的伪代码展示了 MOEA/AS-ID 算法的环境选择过程。首先, 联合种群的目标值按照种群在每个目标上的最大值和最小值进行归一化处理, 目的是为了消除各个目标值之间量级的相互影响; 然后, 依据归一化的目标值分别计算联合种群中任意两个个体之间的向量角和种群中所有个体的  $I_{\text{SDE}}^+$  指标值; 最后, 在接下来的主循环中, 联合种群  $R_t$  中的  $N$  个个体将被逐一删除。具体操作: 在联合种群  $R_t$  中选择一对具有最小向量角的解, 然后通过基于  $I_{\text{SDE}}^+$  指标的删除机制移除指标值较小的被选个体。重复上述过程, 直到被保存到下一代的种群规模满足  $N$  为止。

接下来, 将详细地解释所提算法设计向量角选择策略和  $I_{\text{SDE}}^+$  指标删除策略协作对于平衡种群收敛性和多样性的必要性。

正如2.3节所分析的那样, 在目标空间, 向量角反映了两个个体在搜索方向的相似性。相较于种群中的其他一对解, 选择当前具有最小向量角的两个个体, 反映了被选择的一对个体在搜索方向上具有最大的相似性。如果每次均在剩余的种群中重复删除一对具有最相似搜索方向的一对个体中的一个, 最终种群在搜索方向的多样性可以较好地得到维护。基于向量角背后的思想就是从多样化的方向朝帕累托前沿搜索。

即使基于向量角的选择策略可以找到在搜索方向上最相似的一对个体, 却不能确定到底删除一对个体中的哪一个。此外, 求解高维多目标优化问题比较种群中的个体时, 应该同时考虑它们的收敛性和分布性。然而,  $I_{\text{SDE}}^+$  指标可以提供有效的方法来确定被选择的该对个体中到底删除其中哪一个。正如2.4节所介绍,  $I_{\text{SDE}}^+$  指标可以同时度量种群个体的收敛性和分布性。个体  $I_{\text{SDE}}^+$  指标值越大, 表示个体具有越好的收敛性和分布性。因此, 采用基于  $I_{\text{SDE}}^+$  指标的删除策略来删除基于向量角选择的两个个体中指标值较小的个体, 可以进一步维护种群的收敛性和多样性。

为了更直观地阐述设计的选择策略和删除策略的优势,一个简单的例子来描述上述选择过程。如图1所示,假设有6个个体  $A(0,0.90)$ 、 $B(0.70,1.00)$ 、 $C(1.00,0.30)$ 、 $D(0.75,0.15)$ 、 $E(0.90,0.05)$ 、 $F(1.00,0)$ ,需要将4个个体保留下来。MOEA/AS-ID算法环境选择过程为:首先找到具有最小向量角的个体  $E$  和  $F$ ,然后依据式(3)和式(4)计算得到的个体  $I_{SDE}^+$  指标,  $I_{SDE}^+(E)=0.1$ ,  $I_{SDE}^+(F)=0.05$ 。因此,个体  $F$  被删除。在  $F$  被删除之后,在剩余的解  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  中,找到具有最小向量角的  $C$  和  $D$ ,同样计算个体指标值  $I_{SDE}^+(C)=0$ ,  $I_{SDE}^+(D)=0.15$ 。因此,个体  $C$  被删除。最终被保留下来的个体  $A$ 、 $B$ 、 $D$ 、 $E$  可以朝多样性良好方向收敛到帕累托前沿,最终较好地平衡解集的收敛性和多样性。

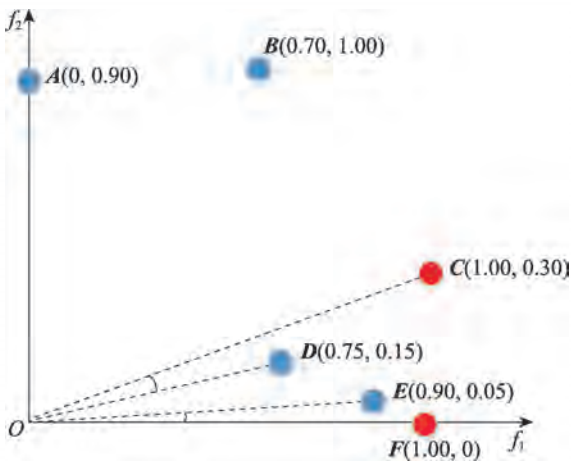


图1 MOEA/AS-ID算法环境选择过程

Fig.1 Environmental selection process of MOEA/AS-ID

在环境选择的过程中,MOEA/AS-ID算法并没有使用任何支配关系、任何权重向量或参考点。因此,它在解决MaOPs方面具有以下优点:由于在高维目标空间,几乎所有解均是非支配解,不会像基于帕累托支配的方法那样对帕累托前沿选择压力不足;不需要像基于分解的方法那样由于权重向量的分布难以符合帕累托前沿形状所造成的求解普适性不足;也不需要像基于IGD指标和R2指标难以采取参考点准确地计算指标值所造成的缺陷。MOEA/AS-ID算法充分利用候选解之间的角度信息和计算简便的  $I_{SDE}^+$  指标来平衡收敛性和多样性。正如4.1节和4.2节所展示的仿真结果,MOEA/AS-ID求解各种特征的高维多目标优化问题是一种较为有效的算法。

总之,MOEA/AS-ID算法的环境选择过程巧妙地设计了包含两种策略的协作机制逐一删除收敛性

和多样性差的解以保留精英个体参与下一代的进化。前者基于向量角的选择策略用于选择一对在目标空间具有最相似搜索方向的个体,后者基于指标的删除策略采用同时兼顾个体收敛性和分布性的  $I_{SDE}^+$  指标比较被选择的这一对个体,然后删除其中具有较小指标值的个体。因此,通过重复执行上述设计的选择策略和删除策略,种群中收敛性和分布性差的个体将被逐个淘汰,进而促使种群朝各个搜索方向收敛到帕累托前沿。

## 2.6 计算复杂度分析

MOEA/AS-ID算法计算复杂度取决于环境选择过程,对于目标数量为  $M$ 、种群规模为  $N$  的多目标优化问题,MOEA/AS-ID的计算复杂度分析如下:(1)对联合种群进行归一化的计算复杂度为  $O(MN)$ ;(2)由于联合种群中任意两个个体之间的向量角均需要被计算,计算种群个体之间向量角的计算复杂度为  $O(MN^2)$ ;(3)排序从联合种群中找出具有最小向量角的一对解所需的计算复杂度为  $O(N^2 \lg N)$ ;(4)执行基于  $I_{SDE}^+$  指标的删除机制所需的计算复杂度为  $O(MN^2)$ 。因此,所提算法的总体时间复杂度为  $\max\{O(MN^2), O(N^2 \lg N)\}$ 。下一章所有参与仿真实验的对比算法的时间复杂度见表1。

表1 七种算法的计算复杂度

Table 1 Computational complexity of seven algorithms

算法	计算复杂度
NSGA-III	$\max\{O(MN^2), O(N^2 \lg^{M-2} N)\}$
MaOEA/IGD	$O(MN^2)$
CDR-MOEA	$O(MN^2)$
MaOEA-IBP	$\max\{O(MN^2), O(N^2 \lg N)\}$
NSGAI-CSR	$O(MN^2)$
TS-NSGAI	$O(MN^2)$
MOEA/AS-ID	$\max\{O(MN^2), O(N^2 \lg N)\}$

## 3 实验设置

### 3.1 测试问题和对比较法

为了全面评估所提算法的性能,在DTLZ(Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler)<sup>[40]</sup>、SDTLZ(scaled DTLZ)<sup>[29]</sup>和MaF(many-objective function)<sup>[41]</sup>三组基准测试系列问题执行仿真实验。该三组基准测试问题的特征包含凹、凸、线性、多模态等,可以较全面地测试算法的性能。由于MaF2测试问题的特征和DTLZ2相同,MaF4测试问题的特征与DTLZ3相同,为了避免重复

在相同特征的测试问题上执行实验,在 MaF 上执行仿真实验时,没有选择 MaF2 和 MaF4 作为测试问题。其他被选择的测试问题的特征见表 2。同时,为了验证所提算法的竞争力,选择 6 个先进的算法 NSGA-III<sup>[29]</sup>、MaOEA/IGD<sup>[32]</sup>、CDR-MOEA<sup>[42]</sup>、MaOEA-IBP<sup>[43]</sup>、NSGAII-CSDR<sup>[12]</sup>、TS-NSGAII<sup>[20]</sup>作为对比算法。

表 2 测试问题及其特征

Table 2 Test problems and their characteristics

问题	特征
DTLZ1	线性、多模态
DTLZ2	凹的
DTLZ3	凹的、多模态
DTLZ4	凹的、有偏的
SDTLZ1	线性、多模态、比例缩放
SDTLZ2	凹的、比例缩放
MaF1	反转、线性
MaF3	凸的、多模态
MaF5	凸的、有偏的

### 3.2 算法性能度量指标

为了定量度量算法求解 MaOPs 的性能,采用被广泛使用在 MOEAs 中的反转世代距离(IGD)<sup>[44]</sup>作为算法性能度量指标。该指标可以同时度量算法所获解集的收敛性和多样性。IGD 值越小,表示算法所获解集越接近且越均匀分布在帕累托前沿,即算法平衡收敛性和多样性的性能越好。

设  $P^*$  是在所求问题上算法最终获得的解集,  $PF^*$  是所求问题的真实帕累托最优前沿上的解集。IGD 指标按如下公式计算:

$$IGD = \frac{\sum_{z \in PF^*} d(z, P^*)}{|PF^*|} \quad (6)$$

$$d(z, P^*) = \min_{v \in P^*} d(z, v) \quad (7)$$

其中,  $d(z, P^*)$  是问题真实前沿面  $PF^*$  上的每一个解  $z$  到  $P^*$  上解的最小欧式距离。 $|P^*|$  和  $|PF^*|$  分别是解集  $P^*$  和  $PF^*$  中解的数量。

每个算法在每个具体测试实例上的 IGD 结果均是独立运行 20 次的平均值和方差。为了将所提算法与被选择的对比算法在统计学上比较性能优势,使用显著性水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验<sup>[45]</sup>在统计学上将对比算法在每一个测试实例上获得的 IGD 结果与 MOEA-AS-ID 获得的结果两两进行比较,使用“+”“-”和“=”分别描述对比算法的性能比 MOEA/AS-ID 显著优、显著劣以及在统计学上性能相似。

### 3.3 参数设置

(1)进化算子。所有对比算法的原始论文均是采用模拟二进制交叉 SBX<sup>[38]</sup>和多项式变异 PM<sup>[39]</sup>产生子代,其中交叉概率  $p_c = 1$ ;变异概率  $p_m = 1/D$ ,  $D$  是决策变量的数量;交叉分布指标  $n_c = 20$ ;变异分布指标  $n_m = 20$ 。

(2)种群的规模。为了和基于分解的算法执行公平的对比实验,种群的规模依据基于分解的算法设置<sup>[18,29]</sup>。表 3 展示了不同的目标对应的种群规模。

(3)算法的终止条件。每次算法在 5、8、10、15 个目标的测试实例上运行的终止条件是对应的最大迭代次数,见表 3 所示。

表 3 种群的规模和最大迭代次数

Table 3 Population size and maximum number of iterations

目标的数量 ( $M$ )	种群的规模 ( $N$ )	最大迭代次数 $G_{max}$
5	210	500
8	156	500
10	230	800
15	240	800

(4)对比算法中的参数按原始论文设置。在 NSGAII-CSDR 中,控制小生境规模的两个参数  $k_{max} = 1.6$ ,  $\Delta_k = 1.1$ ,控制收敛度的两个参数  $a_{max} = 60$ ,  $\Delta_a = 15$ ;在 TS-NSGAII 中,控制两阶段比例的参数  $\eta = 5$ ;在 MaOEA-IBP 中,估计帕累托前沿形状的参数  $p = 0.3$ 。

## 4 实验结果分析

本章首先验证及分析所设计的基于向量角的选择策略和基于指标删除策略协作的有效性,然后对设计的 MOEA/AS-ID 算法与 6 个对比算法 NSGA-III、MaOEA/IGD、CDR-MOEA、MaOEA-IBP、NSGAII-CSDR、TS-NSGAII 在 3 个基准测试系列问题上的实验结果进行分析。

### 4.1 策略有效性验证

为了验证两种策略协作机制的有效性,设计了 MOEA/AS-ID 算法的两个变体与 MOEA/AS-ID 算法在 DTLZ 测试系列问题上执行对比实验。两种变体如下:

(1)MOEA/AS-ID-V1:基于向量角的选择被移除,在环境选择过程中,将联合种群中所有个体的  $I_{SDE}^+$  指标按降序排序,直接选择前  $N$  个个体参与下一代的进化。

(2)MOEA/AS-ID-V2:保留了基于向量角的选择策略,但是个体所有目标求和的适应度评价替代个体的  $I_{SDE}^+$  指标所形成的删除策略逐个删除联合种群中的  $N$  个个体。

MOEA/AS-ID算法与它的两个变体在DTLZ测试系列问题上的结果见表4。从仿真结果来看,MOEA/AS-ID在所有测试实例上均取得了最佳的结果。变体1在所有测试实例上均劣于所提算法MOEA/AS-ID。相对于变体1,变体2的性能相对更佳,但是,变体2在大部分的测试实例上还是劣于所提算法,在DTLZ2和DTLZ4的部分测试实例上变体2取得了与所提算法相似的性能。

对于以上结果的原因很容易解释。对于变体1而言,该算法遗弃了基于向量角的选择策略,使得它难以从多样性良好的方向收敛到帕累托前沿。对于变体2而言,该算法保留了基于角度的选择策略,可以维持算法在搜索方向的多样性,而DTLZ2和DTLZ4主要被设计来测试算法的多样性,因此,在DTLZ2和DTLZ4的部分测试实例上,变体2取得了与所提算法类似的性能。但是,变体2的删除机制所采用的目标求和的适应度评价过于强调个体的收敛性,而MOEA/AS-ID的删除机制所采用的是同时兼顾个体收敛性和分布性的  $I_{SDE}^+$  指标。因此,变体2平衡种群收敛性和多样性的性能会比所提算法差,故而在大部分测试实例上变体2的性能劣于MOEA/AS-ID。

综合以上分析,基于向量角的选择策略和基于指标的删除策略在MOEA/AS-ID算法中缺一不可,因为两种策略所形成的协作机制求解高维多目标优化问题可以有效地平衡解集的收敛性和多样性。策略有效性验证为下一节中MOEA/AS-ID与其他6个对比算法执行更广泛的对比仿真实验验证它求解高维多目标优化问题的竞争力奠定了理论基础。

## 4.2 基准测试系列问题上的仿真结果分析

表5展示了7个算法在DTLZ、SDTLZ、MaF基准测试系列问题上的仿真结果。很明显,相较于其他6个对比算法,MOEA/AS-ID展现出了最佳的竞争力,因为它在3个基准测试系列问题的总共36个测试实例中的27个实例上取得了最佳的结果,而它的6个对比算法NSGA-III、MaOEA/IGD、CDR-MOEA、MaOEA-IBP、NSGAI-CSDR、TS-NSGAI仅分别取得了4个、0个、0个、3个、4个、3个最佳的结果。特别是MOEA/AS-ID在DTLZ1、DTLZ3、SDTLZ2、MaF1以及MaF3的所有测试实例上均打败了它的所有对比算法。即使在其他4个测试实例上所提算法没有全部取得最佳的结果,但是它的性能依然表现良好。例如,在10个和15个目标的DTLZ2、DTLZ4、SDTLZ1上,MOEA/AS-ID仍然是最佳算法;在MaF3上,它仅仅稍逊于MaOEA-IBP和NSGAI-CSDR。以下是在每一个测试问题上仿真结果的具体分析。

DTLZ1和DTLZ3均是具有多模态特点测试问题,包含了许多局部帕累托最优前沿。局部帕累托

表4 MOEA/AS-ID和它的两个变体在DTLZ测试问题上的IGD值

Table 4 IGD values obtained by MOEA/AS-ID and its two variants on DTLZ test problems

Problem	$M$	MOEA/AS-ID-V1	MOEA/AS-ID-V2	MOEA/AS-ID
DTLZ1	5	6.904 7E-2 (6.36E-3) -	5.892 2E-2 (1.24E-3)-	<b>5.160 6E-2 (4.04E-4)</b>
	8	1.457 7E-1 (8.75E-3) -	1.148 5E-1 (4.36E-3)-	<b>1.001 2E-1 (1.59E-3)</b>
	10	1.466 2E-1 (6.15E-3) -	1.184 9E-1 (1.98E-3)-	<b>1.066 6E-1 (9.32E-4)</b>
	15	1.809 9E-1 (8.38E-3) -	1.426 7E-1 (2.86E-3)-	<b>1.295 5E-1 (1.71E-3)</b>
DTLZ2	5	1.917 8E-1 (1.73E-3) -	<b>1.709 9E-1 (8.57E-4) =</b>	<b>1.704 8E-1 (8.96E-4)</b>
	8	3.638 6E-1 (3.03E-3) -	3.595 7E-1 (2.37E-3) -	<b>3.566 9E-1 (1.64E-3)</b>
	10	4.376 0E-1 (3.16E-3) -	<b>4.248 8E-1 (1.70E-3) =</b>	<b>4.236 0E-1 (1.92E-3)</b>
	15	5.549 5E-1 (3.62E-3) -	5.453 7E-1 (1.70E-3) -	<b>5.417 5E-1 (1.70E-3)</b>
DTLZ3	5	1.865 0E-1 (3.50E-3) -	1.924 2E-1 (2.38E-3) -	<b>1.825 2E-1 (2.28E-3)</b>
	8	3.858 3E-1 (8.33E-3) -	3.900 3E-1 (2.58E-2) -	<b>3.743 9E-1 (4.49E-3)</b>
	10	4.493 6E-1 (5.11E-3) -	4.389 0E-1 (7.52E-3) -	<b>4.362 5E-1 (5.08E-3)</b>
	15	5.859 1E-1 (1.49E-2) -	5.565 7E-1 (7.02E-3) -	<b>5.540 1E-1 (4.60E-3)</b>
DTLZ4	5	1.946 2E-1 (1.89E-3) -	<b>1.693 1E-1 (5.22E-4) =</b>	<b>1.706 4E-1 (9.21E-4)</b>
	8	3.855 8E-1 (4.84E-2) -	<b>3.562 7E-1 (1.49E-3) =</b>	<b>3.555 6E-1 (1.31E-3)</b>
	10	4.278 6E-1 (2.57E-3) -	4.236 8E-1 (1.13E-3) -	<b>4.196 0E-1 (1.32E-3)</b>
	15	5.459 0E-1 (4.51E-3) -	5.417 8E-1 (1.09E-3) -	<b>5.345 7E-1 (1.50E-3)</b>



表 5 7 种算法在 3 个标准测试系列问题上的 IGD 值  
Table 5 IGD values obtained by 7 algorithms on 3 benchmark test suites

Problem	M	NSGA-III	MaOEA/IGD	CDR-MOEA	MaOEA-IBP	NSGAI-ICSDR	TS-NSGAI	MOEA/AS-ID
DTLZ1	5	5.275 8E-2 (7.47E-5) -	2.897 4E-1 (2.96E-1) -	1.070 7E-1 (1.02E-1) -	5.962 5E-2 (6.26E-4) -	5.990 2E-2 (2.84E-3) -	5.370 1E-2 (2.48E-3) -	<b>5.160 6E-2 (4.04E-4)</b>
	8	<b>1.055 4E-1 (1.41E-2)</b> =	2.720 1E-1 (2.14E-1) -	1.936 2E-1 (1.13E-1) -	1.225 1E-1 (1.34E-3) -	1.300 7E-1 (9.61E-3) -	1.322 5E-1 (3.17E-2) -	<b>1.001 2E-1 (1.59E-3)</b>
	10	1.401 6E-1 (2.02E-2) -	2.051 0E-1 (2.03E-1) -	2.599 4E-1 (1.41E-1) -	1.407 5E-1 (1.43E-3) -	1.348 7E-1 (6.90E-3) -	1.598 8E-1 (2.85E-2) -	<b>1.066 6E-1 (9.32E-4)</b>
	15	1.407 9E-1 (2.60E-2) -	1.883 0E-1 (1.19E-1) -	3.475 8E-1 (1.41E-1) -	1.800 3E-1 (5.99E-3) -	1.791 5E-1 (8.66E-3) -	1.986 9E-1 (9.65E-3) -	<b>1.295 5E-1 (1.71E-3)</b>
	5	1.651 4E-1 (1.66E-5) +	1.688 3E-1 (7.20E-4) +	1.904 3E-1 (5.40E-3) -	1.910 6E-1 (1.72E-3) -	3.046 3E-1 (1.88E-1) -	<b>1.650 5E-1 (1.08E-4)</b> +	1.704 8E-1 (8.96E-4)
DTLZ2	8	3.374 3E-1 (6.57E-2) +	3.464 6E-1 (7.67E-3) +	6.586 5E-1 (5.80E-2) -	3.642 4E-1 (3.29E-3) -	6.692 3E-1 (7.48E-3) -	<b>3.291 8E-1 (1.68E-3)</b> +	3.566 9E-1 (1.64E-3)
	10	4.854 5E-1 (5.24E-2) -	4.636 5E-1 (4.52E-3) -	4.978 4E-1 (9.91E-2) -	4.432 2E-1 (2.29E-3) -	4.871 1E-1 (8.26E-2) -	4.531 1E-1 (1.44E-3) -	<b>4.236 0E-1 (1.92E-3)</b>
	15	5.574 1E-1 (3.16E-2) -	8.201 8E-1 (2.11E-1) -	7.997 9E-1 (1.91E-9) -	5.562 2E-1 (3.61E-3) -	6.001 4E-1 (1.75E-2) -	5.463 3E-1 (3.80E-3) -	<b>5.417 5E-1 (1.70E-3)</b>
DTLZ3	5	<b>1.835 2E-1 (1.61E-2)</b> =	1.034 4E+1 (4.64E+0) -	1.898 7E-1 (5.05E-3) -	1.900 1E-1 (1.47E-3) -	<b>1.840 2E-1 (4.01E-3)</b> =	2.314 8E-1 (3.59E-2) -	<b>1.825 2E-1 (2.28E-3)</b>
	8	1.880 3E+0 (1.85E+0) -	7.766 7E+0 (3.35E+0) -	5.202 2E-1 (1.33E-1) -	4.174 8E-1 (1.84E-1) -	5.250 1E-1 (1.29E-1) -	4.944 0E-1 (2.61E-2) -	<b>3.743 9E-1 (4.49E-3)</b>
	10	9.172 7E-1 (1.07E+0) -	6.107 8E+0 (4.14E+0) -	4.603 8E-1 (6.54E-3) -	4.468 5E-1 (6.61E-3) -	4.789 0E-1 (2.65E-2) -	5.881 9E-1 (5.15E-2) -	<b>4.362 5E-1 (5.08E-3)</b>
	15	6.681 5E-1 (1.56E-1) -	4.837 0E+0 (3.53E+0) -	6.190 5E-1 (7.92E-2) -	5.618 7E-1 (5.36E-3) -	6.486 2E-1 (6.63E-2) -	8.478 1E-1 (8.61E-2) -	<b>5.540 1E-1 (4.60E-3)</b>
	5	<b>1.651 5E-1 (3.97E-5)</b> +	2.155 6E-1 (9.71E-2) -	7.454 4E-1 (2.21E-1) -	1.913 6E-1 (2.00E-3) -	6.171 0E-1 (4.70E-2) -	1.656 8E-1 (2.31E-4) +	1.706 4E-1 (9.21E-4)
DTLZ4	8	<b>3.361 6E-1 (5.98E-2)</b> +	3.748 9E-1 (6.24E-2) =	8.488 9E-1 (1.92E-1) -	3.680 9E-1 (1.89E-2) -	7.592 3E-1 (6.48E-2) -	3.473 1E-1 (3.97E-3) +	3.555 6E-1 (1.31E-3)
	10	4.549 1E-1 (6.22E-4) -	4.663 4E-1 (2.86E-2) -	1.157 6E+0 (1.53E-1) -	4.452 4E-1 (1.80E-2) -	7.535 0E-1 (3.27E-2) -	4.541 1E-1 (1.86E-3) -	<b>4.196 0E-1 (1.32E-3)</b>
	15	5.651 3E-1 (3.95E-2) -	5.652 7E-1 (4.07E-2) -	9.929 3E-1 (2.04E-1) -	5.524 8E-1 (2.32E-3) -	8.304 1E-1 (2.24E-2) -	5.575 0E-1 (1.22E-2) -	<b>5.345 7E-1 (1.50E-3)</b>
SDTLZ1	5	3.833 3E-1 (1.53E-3) -	1.926 7E+0 (5.65E-1) -	6.187 2E-1 (6.36E-2) -	<b>3.157 2E-1 (3.56E-3)</b> +	3.164 9E-1 (8.30E-3) +	3.334 4E-1 (1.57E-2) =	3.319 4E-1 (2.31E-2)
	8	3.322 9E+0 (7.28E-1) -	1.493 8E+1 (1.48E+1) -	1.092 2E+1 (2.27E-1) -	<b>2.948 5E+0 (2.24E-1)</b> =	6.149 0E+0 (7.10E-1) -	4.155 8E+0 (1.68E+0) -	<b>2.921 0E+0 (3.60E-1)</b>
	10	1.322 5E+1 (2.06E+0) -	3.796 1E+1 (1.97E+0) -	3.756 8E+1 (3.51E-1) -	9.463 9E+0 (6.41E-1) -	3.024 6E+1 (3.65E+0) -	1.815 1E+1 (5.19E+0) -	<b>8.145 5E+0 (7.10E-1)</b>
	15	4.144 2E+2 (8.19E+1) -	1.208 8E+3 (1.67E+3) -	8.408 8E+2 (1.19E-1) -	2.743 5E+2 (4.46E+1) -	8.382 8E+2 (1.41E+0) -	4.283 1E+2 (9.33E+1) -	<b>2.147 3E+2 (1.64E+1)</b>
	5	9.850 3E-1 (6.85E-4) -	1.337 8E+0 (6.34E-3) -	6.663 9E+0 (1.56E+0) -	1.196 1E+0 (4.82E-2) -	2.291 4E+0 (1.60E+0) -	9.901 4E-1 (5.44E-3) -	<b>9.218 5E-1 (1.13E-2)</b>
SDTLZ2	8	1.060 9E+1 (2.31E-1) -	3.851 6E+1 (4.13E+0) -	4.076 7E+1 (9.05E-1) -	1.292 5E+1 (1.09E+0) -	2.755 3E+1 (2.56E+0) -	<b>1.014 4E+1 (4.36E-1)</b> =	<b>1.014 6E+1 (7.38E-1)</b>
	10	5.075 6E+1 (1.22E+1) -	1.502 3E+2 (3.60E+0) -	1.502 4E+2 (8.37E-1) -	5.119 1E+1 (3.06E+0) -	1.306 2E+2 (1.45E+1) -	4.481 1E+1 (4.33E+0) -	<b>3.224 1E+1 (1.96E+0)</b>
	15	1.298 5E+3 (2.02E+2) -	3.703 6E+3 (1.48E+2) -	3.662 0E+3 (2.34E-1) -	1.392 3E+3 (3.08E+2) -	3.638 3E+3 (3.01E+1) -	1.121 3E+3 (1.35E+2) -	<b>7.535 0E+2 (3.93E+1)</b>
MaF1	5	1.881 1E-1 (9.34E-3) -	2.888 9E-1 (1.13E-3) -	1.056 1E-1 (1.42E-3) -	1.148 1E-1 (1.25E-3) -	1.099 0E-1 (9.78E-4) -	1.578 0E-1 (2.49E-3) -	<b>1.041 7E-1 (4.01E-4)</b>
	8	2.886 5E-1 (3.98E-3) -	3.628 0E-1 (5.22E-3) -	2.101 1E-1 (4.81E-3) -	2.308 4E-1 (2.49E-3) -	2.184 3E-1 (2.22E-3) -	3.094 6E-1 (5.97E-3) -	<b>2.056 5E-1 (1.96E-3)</b>
	10	2.960 8E-1 (5.33E-3) -	3.523 8E-1 (4.45E-3) -	7.325 2E-1 (2.74E-1) -	2.607 0E-1 (3.22E-3) -	2.412 3E-1 (2.19E-3) -	3.155 6E-1 (2.26E-2) -	<b>2.296 5E-1 (1.76E-3)</b>
	15	3.213 2E-1 (9.45E-3) -	3.817 9E-1 (1.22E-2) -	6.709 7E-1 (1.24E-1) -	3.351 7E-1 (5.04E-3) -	3.139 4E-1 (3.36E-3) -	4.537 7E-1 (3.36E-2) -	<b>2.925 8E-1 (3.68E-3)</b>
	5	7.999 7E-2 (1.16E-2) +	1.781 4E+1 (4.06E+1) -	1.451 1E-1 (7.84E-3) +	<b>6.763 1E-2 (1.88E-3)</b> +	1.153 8E-1 (1.79E-2) +	1.691 0E-1 (4.23E-2) =	1.588 0E-1 (1.47E-2)
MaF3	8	6.779 5E+1 (1.28E+2) =	5.211 0E+0 (7.13E+0) -	1.777 6E-1 (4.88E-3) -	2.418 4E-1 (5.30E-1) -	<b>1.461 1E-1 (1.08E-2)</b> +	4.109 8E-1 (1.27E-1) -	1.694 5E-1 (1.43E-2)
	10	1.340 4E+1 (4.11E+1) -	1.455 6E+0 (2.35E+0) -	1.516 1E-1 (3.00E-3) -	1.273 5E-1 (3.89E-3) +	<b>1.239 5E-1 (5.42E-3)</b> +	2.742 6E-1 (6.87E-2) -	1.417 8E-1 (9.28E-3)
	15	1.568 4E+0 (5.33E+0) -	1.411 6E+0 (2.04E+0) -	1.408 9E-1 (9.74E-4) -	1.350 8E-1 (2.96E-2) =	<b>1.211 7E-1 (3.35E-3)</b> +	4.151 1E-1 (5.34E-1) -	1.373 0E-1 (7.98E-3)
MaF5	5	1.970 2E+0 (3.06E-3) +	4.121 4E+0 (1.76E+0) -	1.328 9E+1 (3.23E+0) -	2.085 6E+0 (4.36E-2) -	1.009 4E+1 (4.55E+0) -	1.964 1E+0 (1.35E-2) -	<b>1.799 1E+0 (3.79E-2)</b>
	8	2.097 8E+1 (4.31E-1) -	3.925 5E+1 (1.95E+1) -	8.567 1E+1 (7.73E+0) -	1.705 8E+1 (4.07E+0) -	8.424 7E+1 (6.46E+0) -	1.871 7E+1 (9.36E-1) -	<b>1.528 4E+1 (6.23E-1)</b>
	10	8.783 9E+1 (9.85E-1) -	2.905 8E+2 (1.05E+1) -	3.063 2E+2 (4.84E-11) -	5.599 4E+1 (2.47E+0) -	2.935 7E+2 (3.11E+1) -	8.204 2E+1 (5.56E+0) -	<b>4.944 6E+1 (1.52E+0)</b>
	15	2.566 3E+3 (8.20E+1) -	7.324 4E+3 (1.34E+0) -	7.296 8E+3 (1.31E+2) -	1.716 2E+3 (1.32E+2) -	7.057 1E+3 (8.28E+2) -	2.145 0E+3 (2.92E+2) -	<b>1.326 7E+3 (9.93E+1)</b>

最优前沿的出现对算法收敛到全局最优产生了极大的挑战,特别是随着目标维数增加,DTLZ3的局部帕累托最优前沿的数量成指数倍增加。从表5中的结果可以观察到MOEA/AS-ID在DTLZ1和DTLZ3的所有测试实例上均取得了最佳的结果,这是因为MOEA/AS-ID算法中的基于向量角的选择策略注重局部信息的维护,故而防止算法收敛到帕累托最优前沿的部分区域。此外,删除策略中的 $I_{SDE}^+$ 指标同时考虑了个体的收敛性和分布性,可以进一步加强种群的收敛性和多样性。

DTLZ2和DTLZ4主要用于测试随着目标维数的增加,算法维持多样性的能力。在5个、8个目标的DTLZ2和DTLZ4上,NSGA-III和TS-NSGAI的性能均优于MOEA/AS-ID,这是因为DTLZ2和DTLZ4的帕累托前沿是一个分布在目标空间的凹面球形,且较低维空间的DTLZ4偏好程度低,NSGA-III和TS-NSGAI采用了一组预定义均匀分布在目标空间的参考向量在处理该类问题时可以有效地维持种群的多样性。但是,随着目标维数的增加,即在10个和15个目标的DTLZ2和DTLZ4上,NSGA-III和TS-NSGAI均劣于MOEA/AS-ID,并且MOEA/AS-ID取得了最优的表现,这是因为随着目标维数的增加,非支配解的数量成指数倍增加,NSGA-III采用的帕累托支配关系将会失效。此外,随着目标数量的增加,DTLZ4的偏好程度也会加剧,使得借助参考向量维持种群多样性的算法性能下降。MOEA/AS-ID没有借助任何参考向量,所设计的基于向量角的选择策略可以引导种群朝各个方向搜索。故而,在高维空间可以有效维持种群的多样性。

SDTLZ1和SDTLZ2是分别在DTLZ1和DTLZ2上改进得到的测试问题。MOEA/AS-ID在8、10、15个目标上的SDTLZ1和SDTLZ2上均打败了它的6个竞争算法,说明MOEA/AS-ID可以有效地求解该类高维多目标优化问题。

对于具有多模态且凸特征的MaF3,虽然MOEA/AS-ID在该测试问题上没有获得最佳的结果,但是,它的性能并不差,仅仅劣于MaOEA-IBP和NSGAI-CSDR。在MaOEA-IBP中,估计帕累托前沿的参数 $p=0.3$ ,这本身就默认了帕累托前沿是凸的,且该参数刚好近似估计到了MaF3帕累托最优前沿的形状。因此,MaOEA-IBP在MaF3上表现出了较好的性能。但是,该估计方法所造成的缺点就是使得MaOEA-IBP对于处理不同特征的帕累托前沿问题普适性

差。正如表5展示的那样,在具有凹特征的测试问题上,MaOEA-IBP并没有展示良好的结果。NSGAI-CSDR利用了小生镜技术设计了一种支配关系,在每个小生境内仅仅确定一个解是非支配解,这对于处理多模态问题具有优势。此外,NSGAI-CSDR也利用类似MaOEA-IBP方法估计帕累托前沿形状以此确定收敛度度量方法。因此,NSGAI-CSDR在MaF3上展现出了最好的性能。但是,在MaF测试系列问题上,MOEA/AS-ID的优势还是特别明显的,因为MOEA/AS-ID在具有线性、反转特征的MaF1和偏好特征的MaF5的所有测试实例上均取得了最好的结果。

为了更加直观地比较各个算法的性能,图2展示了7个算法在15个目标的DTLZ3上所获非支配解集的平行坐标图。从图2来看,NSGA-III、NSGAI-CSDR、TS-NSGAI所获解集的收敛性较差,MaOEA/IGD仅仅获得了帕累托前沿的部分解集。相较于其他4个算法,CDR-MOEA和MaOEA-IBP可以获得收敛性和多样性更好的解集。但是,CDR-MOEA所获解集不能较好地覆盖第3个目标和第7个目标,MaOEA-IBP不能较好地覆盖第13个目标。因此,它们的性能稍逊MOEA/AS-ID。

为了直观地比较各个算法求解不同目标测试系列问题的总体性能,图3展示了所有算法分别在5、8、10、15个目标的3个基准测试系列问题上的平均性能得分<sup>[46]</sup>。平均性能得分越低,说明算法总体性能越好。从图3可以发现MOEA/AS-ID在5、8、10、15个目标的DTLZ、SDTLZ、MaF系列问题上的平均性能得分均最低,说明MOEA/AS-ID在这3个系列问题上的总体性能最佳。特别是在10个和15个目标的DTLZ和SDTLZ上,MOEA/AS-ID的性能得分为0,说明在10个和15个目标的DTLZ和SDTLZ的所有测试实例上,MOEA/AS-ID均取得了最佳的结果,该结果也和表5中展示的结果相吻合。

最后,为了展示各个算法求解高维多目标优化问题性能的稳定性,由于空间受限,图4仅展示了所有算法在15个目标的DTLZ3、DTLZ4、MaF1以及MaF3上20次运行获得的IGD值的箱图。由图4可知,MOEA/AS-ID算法在DTLZ3、DTLZ4、MaF3上的长方形长度最短,在15目标的MaF1上的箱图长度近似MaOEA-IBP和NSGAI-CSDR,表明所提算法具有良好的稳定性。此外,所提算法在15个目标的DTLZ3、DTLZ4、MaF1上的箱图红线位置最低,在15个目标的MaF3上的箱图红线位置仅仅高于NSGAI-

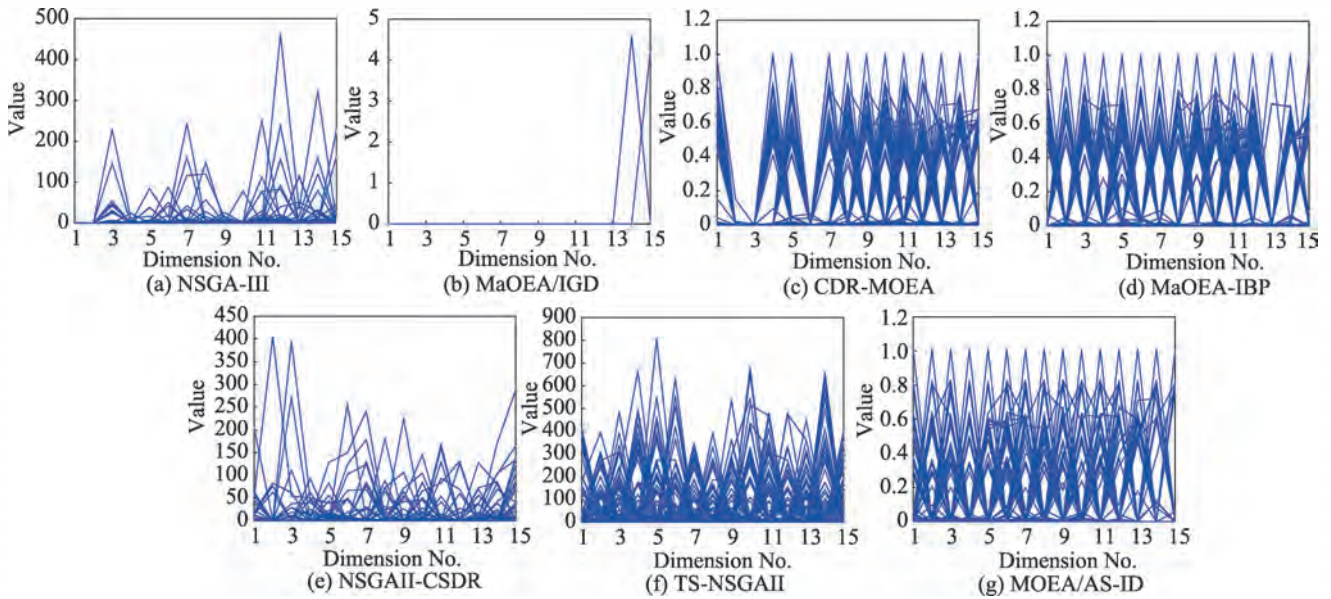


图2 15目标DTLZ3上非支配解的平行坐标图

Fig.2 Parallel coordinates of non-dominated solutions on 15-objective DTLZ3

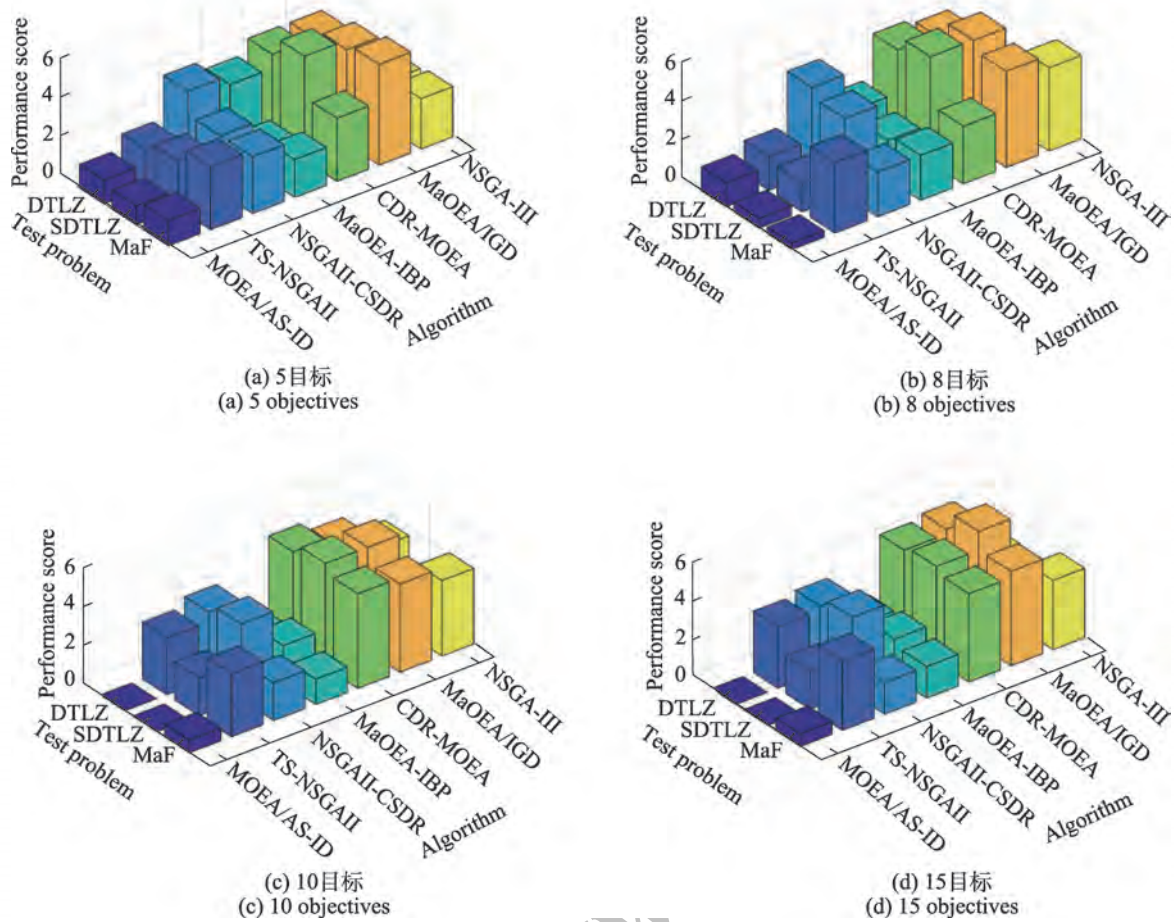


图3 7个算法在3组测试问题上的平均性能得分

Fig.3 Average performance scores obtained by 7 algorithms on 3 test problems

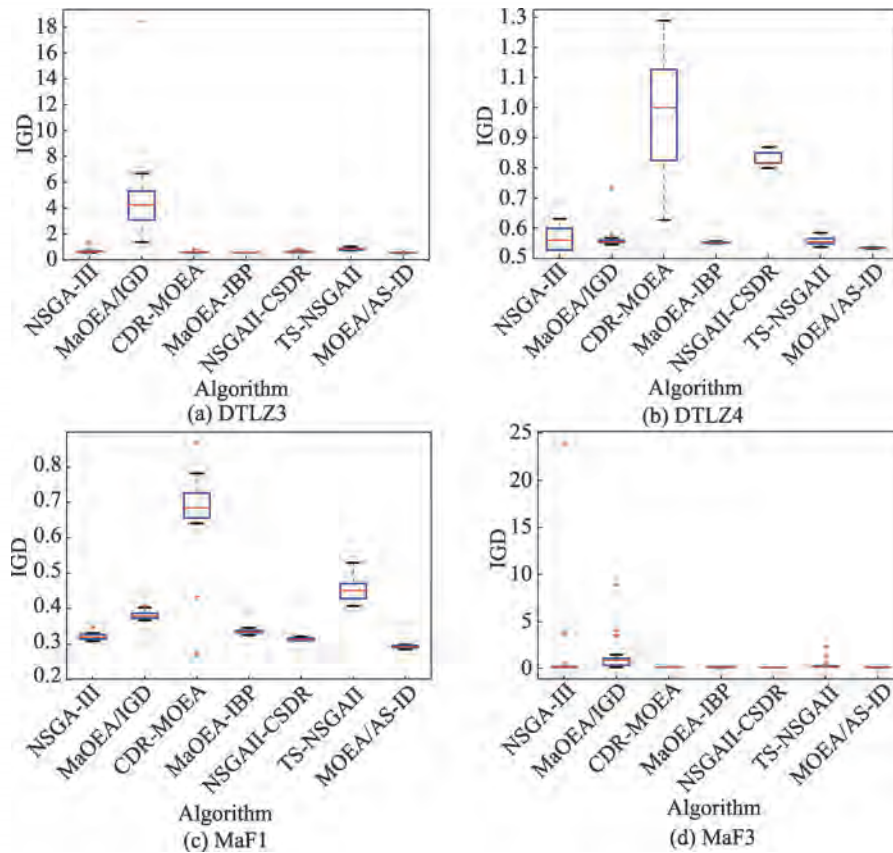


图4 15目标测试问题上运行20次IGD值的箱图

Fig.4 Box diagram of IGD values among 20 runs on test problems with 15 objectives

CSDR。因此,箱图的结果表明,所提算法求解高维多目标优化问题可以使种群稳定地收敛到帕累托最优前沿。

综合以上分析可知,所设计的算法 MOEA/AS-ID 在 DTLZ、SDTLZ、MaF 上均表现出了较强的竞争力,说明所提算法求解高维多目标优化问题平衡收敛性和多样性的能力具有极大的优势。

## 5 结论

为了提高进化算法求解高维多目标优化问题平衡收敛性和多样性的能力,提出了基于向量角选择和指标删除协作机制的高维多目标进化算法 MOEA/AS-ID。该算法在环境选择过程中设计了基于向量角的选择策略和基于  $I_{sde}^*$  指标删除策略所形成的协作机制保留收敛性和多样性良好的解集到下一代参与进化。仿真结果表明仅仅只有两种策略的协作才能展现出最佳的性能。此外,与6个对比算法在 DTLZ、SDTLZ、MaF 基准测试系列问题上的仿真结果也充分证明了 MOEA/AS-ID 算法求解高维多目标优化问题平衡收敛性和多样性的竞争力。但是,MOEA/AS-

ID 也有一定的局限性,在偏好程度低的 DTLZ4 上维持多样性稍逊于 NSGA-III 和 TS-NSGAI,解决多模态且凸的 MaF3 性能稍逊于 NSGAI-CSDR 和 MaOEA-IBP,因此,解决具有对应特征的实际应用问题也会有一定的局限性。

## 参考文献:

- [1] 易灵芝, 林佳豪, 刘建康, 等. 改进自适应 MOEA/D 算法的楼宇负荷优化调度[J]. 计算机工程与应用, 2022, 58(2): 295-302.  
YI L Z, LIN J H, LIU J K, et al. Improved adaptive MOEA/D algorithm for building load optimization scheduling[J]. Computer Engineering and Applications, 2022, 58(2): 295-302.
- [2] 王琴, 杨信丰, 李楠, 等. 不确定环境下的危险品运输车辆路径优化[J]. 计算机工程与应用, 2022, 58(15): 309-316.  
WANG Q, YANG X F, LI N, et al. Route optimization of hazardous materials transportation vehicles in uncertain environment[J]. Computer Engineering and Applications, 2022, 58(15): 309-316.
- [3] 顾清华, 莫明慧, 卢才武, 等. 求解约束高维多目标问题的分解约束支配 NSGA-II 优化算法[J]. 控制与决策, 2020,

- 35(10): 9-15.
- GU Q H, MO M H, LU C W, et al. Decomposition-based constrained dominance principle NSGA-II for constrained many-objective optimization problems[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(10): 9-15.
- [4] 栾宪超, 常健, 王聪, 等. 主动关节履带式蛇形救援机器人结构参数多目标优化设计[J]. *机器人*, 2022, 44(3): 267-280.
- LUAN X C, CHANG J, WANG C, et al. Multi-objective optimization design of structural parameters for a crawler type snake-like rescue robot with active joint[J]. *ROBOT*, 2022, 44(3): 267-280.
- [5] 宋超, 周铸, 李伟斌, 等. 旋翼翼型高维多目标气动优化设计[J]. *北京航空航天大学学报*, 2022, 48(1): 95-105.
- SONG C, ZHOU Z, LI W B, et al. Many-objective aerodynamic optimization design of rotor airfoil[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2022, 48(1): 95-105.
- [6] DEB K, AGARWAL S, MEYARIVAN T. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization NSGA-II[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [7] ZHANG Q, HUI L. MOEA/D: a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2008, 11(6): 712-731.
- [8] LI B, LI J, TANG K, et al. Many-objective evolutionary algorithms: a survey[J]. *ACM Computing Surveys*, 2015, 48(1): 1-35.
- [9] ZHU S, XU L, GOODMAN E D, et al. A new many-objective evolutionary algorithm based on generalized pareto dominance [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(8): 7776-7790.
- [10] 谢承旺, 余伟伟, 郭华, 等. DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法[J]. *计算机学报*, 2022, 45(2): 317-333.
- XIE C W, YU W W, GUO H, et al. DAV-MOEA: a many-objective evolutionary algorithm adopting dynamic angle vector based dominance relation[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2022, 45(2): 317-333.
- [11] LIU Y, ZHU N, LI K, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 376-399.
- [12] SHEN J, WANG P, WANG X. A controlled strengthened dominance relation for evolutionary many-objective optimization [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(5): 3645-3657.
- [13] KHAN B, HANOUN S, JOHNSTONE M, et al. A scalarization-based dominance evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Information Sciences*, 2019, 474: 236-252.
- [14] GU Q, CHEN H, CHEN L, et al. A many-objective evolutionary algorithm with reference points-based strengthened dominance relation[J]. *Information Sciences*, 2020, 554: 236-255.
- [15] ZHOU C, DAI G, WANG M. Enhanced theta dominance and density selection based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *Applied Intelligence*, 2018, 48(4): 992-1012.
- [16] WANG H, JIAO L, YAO X. Two\_Arch2: an improved two-archive algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(4): 524-541.
- [17] HE C, TIAN Y, JIN Y, et al. A radial space division based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 61: 603-621.
- [18] ZHOU J, ZOU J, YANG S, et al. Niche-based and angle-based selection strategies for many-objective evolutionary optimization[J]. *Information Sciences*, 2021, 571: 133-153.
- [19] CHEN H, CHENG R, PEDRYCZ W, et al. Solving many-objective optimization problems via multistage evolutionary search[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(6): 3552-3564.
- [20] MING F, GONG W, WANG L. A two-stage evolutionary algorithm with balanced convergence and diversity for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(10): 6222-6234.
- [21] PANICHELLA A. An adaptive evolutionary algorithm based on non-Euclidean geometry for many-objective optimization [C]//*Proceedings of the 2019 Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Prague, Jul 13-17, 2019. New York: ACM, 2019: 595-603.
- [22] LIANG Z, LUO T, HU K, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(9): 4553-4566.
- [23] LI L, YEN G G, SAHOO A, et al. On the estimation of Pareto front and dimensional similarity in many-objective evolutionary algorithm[J]. *Information Sciences*, 2021, 563: 375-400.
- [24] ZOU J, FU L, YANG S, et al. An adaptation reference-point-based multiobjective evolutionary algorithm[J]. *Information Sciences*, 2019, 488: 41-57.
- [25] MZ A, LEI W A, WL B, et al. Many-objective evolutionary algorithm with adaptive reference vector[J]. *Information Sciences*, 2021, 563(2): 70-90.
- [26] YUAN Y, XU H, WANG B, et al. Balancing convergence and diversity in decomposition-based many-objective optimizers[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 180-198.
- [27] CHEN J, DING J, TAN K C, et al. A decomposition-based evolutionary algorithm for scalable multi/many-objective

- optimization[J]. Memetic Computing, 2021, 13(3): 413-432.
- [28] LIU R, WANG R, BIAN R, et al. A decomposition-based evolutionary algorithm with correlative selection mechanism for many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2021, 29(2): 269-304.
- [29] DEB K, JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577-601.
- [30] QI Y, LIU D, LI X, et al. An adaptive penalty-based boundary intersection method for many-objective optimization problem[J]. Information Sciences, 2020, 509: 356-375.
- [31] ZOU J, ZHANG Z, ZHENG J, et al. A many-objective evolutionary algorithm based on dominance and decomposition with reference point adaptation[J]. Knowledge-Based Systems, 2021, 231: 912-931.
- [32] SUN Y, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2018, 23(2): 173-187.
- [33] CAI X, XIAO Y, LI M, et al. A grid-based inverted generational distance for multi/many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2021, 25(1): 21-34.
- [34] HERNÁNDEZ G R, COELLO COELLO C A. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization[C]//Proceedings of the 2015 Genetic and Evolutionary Computation Conference, Madrid, Jul 11-15, 2015. New York: ACM, 2015: 679-686.
- [35] 陈国玉, 李军华, 黎明, 等. 基于R2指标和参考向量的多维多目标进化算法[J]. 自动化学报, 2021, 47(11): 2675-2690.
- CHEN G Y, LI J H, LI M, et al. An R2 indicator and reference vector based many-objective optimization evolutionary algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2021, 47(11): 2675-2690.
- [36] BADER J, ZITZLER E. HypE: an algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [37] TRINADH, PAMULAPATI, RAMMOHAN, et al.  $I_{SDE}^*$  — an indicator for multi and many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 346-352.
- [38] AGRAWAL R B, DEB K. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. Complex Systems, 1995, 9(3): 115-148.
- [39] DEB K, GOYAL M. A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design[J]. Computer Science and Informatics, 1996, 26(4): 30-45.
- [40] DEB K, THIELE L, LAUMANNNS M, et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization[J]. Evolutionary Multiobjective Optimization, 2006: 105-145.
- [41] CHENG R, LI M, TIAN Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. Complex & Intelligent Systems, 2017, 3(1): 67-81.
- [42] YANG F, XU L, CHU X, et al. A new dominance relation based on convergence indicators and niching for many-objective optimization[J]. Applied Intelligence, 2021, 51(8): 5525-5542.
- [43] LIANG Z, LUO T, HU K, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4553 - 4566.
- [44] ZITZLER E, THIELE L, LAUMANNNS M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: an analysis and review[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.
- [45] DERRAC J, GARCIA S, MOLINA D, et al. A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2011, 1(1): 3-18.
- [46] YUAN Y, XU H, WANG B, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(1): 16-37.



顾清华 (1981—), 男, 山东潍坊人, 博士, 教授, CCF 会员, 主要研究方向为多目标优化、露天矿车辆调度。

GU Qinghua, born in 1981, Ph.D., professor, CCF member. His research interests include many-objective optimization and open-pit mine vehicle dispatch.



骆家乐 (1997—), 男, 江西南昌人, 博士研究生, 主要研究方向为多目标优化、露天矿运输系统优化。

LUO Jiale, born in 1997, Ph.D. candidate. His research interests include many-objective optimization and optimization of open-pit transportation system.



李学现 (1993—), 男, 山东德州人, 博士研究生, 主要研究方向为多目标优化、露天矿运输系统优化。

LI Xuexian, born in 1993, Ph.D. candidate. His research interests include many-objective optimization and optimization of open-pit transportation system.